`Preparaduría VIII`

1.- Sea T un operador lineal sobre V. Suponga que $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k$, donde cada W_i es invariante por T. Sea T_i el operador restricción sobre W_i.

i) Demuestre que $\mathrm{Det}\,(T) = \prod \mathrm{Det}\,(T_i)$.

ii) Demuestre que el polinomio característico de T es el producto de los polinomios característicos de los T_i.

iii) Demuestre que el polinomio minimal de T es el mínimo común múltiplo de los polinomios minimales de $T_1, \ldots T_k$.

2.- Sea T un operador lineal sobre V que conmuta con todo operador proyección sobre V. Qué puede decir de T?

3.- Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^3$ representado por la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar las matrices de los operadores N, nilpotente y D, diagonalizable, tales que $T = D + N$ y D conmuta con N.

4.- Sea T un operador lineal con polinomio característico

$$f = (x - c_1)^{d_1} (x - c_2)^{d_2} \ldots (x - c_k)^{d_k}$$

y polinomio minimal

$$p = (x - c_1)^{r_1} (x - c_2)^{r_2} \ldots (x - c_k)^{r_k}$$

Sea W_i el núcleo de $(T - c_i)^{r_i}$.

i) Demuestre que W_i es el conjunto de todos los vectores α de V tales que $(T - c_i I)^m (\alpha) = 0$ para algún entero m, de depende de α.

ii) Demuestre que la dimensión de W_i es d_i.

5.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo de los complejos. Sea T un operador sobre V y D su parte diagonalizable. Demuestre que si g es un polinomio con coeficientes complejos entonces la parte diagonalizable de $g\,(T)$ es $g\,(D)$.

6.- Sea V de dimensión finita y T un operador lineal sobre V que conmuta con cada operador diagonalizable en V. Demuestre que T es un múltiplo escalar de la identidad.

7.- Sea V el espacio de las matrices $n \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ y A una matriz dada. Sea $\mathfrak{T}(B) = AB - BA$. Demuestre que si A es nilpotente, $\mathfrak{T}$ es nilpotente.

8.- Sea T un operador lineal con polinomio minimal de la forma p^n, con p irreducible. Demuestre que existe un vector α tal que el T-anulador de α es p^n. Usar ésto junto con el teorema de descomposición prima para probar que para todo T existe un vector α con T-anulador igual al polinomio minimal de T.

9.- Si N es nilpotente sobre un espacio de dimensión n, entonces el polinomio característico de N es x^n.

10.- Sean N_1 y N_2 matrices 3×3 nilpotentes sobre $\mathbb{F}$. Demuestre que son semejantes si, y sólo si, tienen el mismo polinomio minimal. Use ésto y la forma de Jordan para que si A y B son matrices $n \times n$ con el **mismo** polinomio característico

$$f = (x - c_1)^{d_1} (x - c_2)^{d_2} \dots (x - c_k)^{d_k}$$

y el mismo polinomio minimal *y ningún* d_i *es mayor que 3* , entonces A y B son semejantes.

11.- Si A es una matriz compleja 5×5 con polinomio característico

$$f = (x - 2)^3 (x + 7)^2$$

y polinomio minimal

$$f = (x - 2)^2 (x + 7)$$

Hallar la forma de Jordan para A.

12.- Cuántas posibles formas de Jordan hay para una matriz compleja 6×6 con polinomio característico $(x + 2)^4 (x - 1)^2$?

13.- Sea A la matriz compleja

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Hallar la forma de Jordan.

14.- Clasificar por semejanza todas las matrices $n \times n$ complejas A tales que $A^n = I$.

15.- Si N es una matriz nilpotente $k \times k$ elemental, es decir, $N^k = 0$ pero $N^{k-1} \neq 0$, demostrar que N^t es semejante a N. Luego, usando la forma de Jordan, podrá probar que toda matriz compleja $n \times n$ es semejante a su transpuesta.